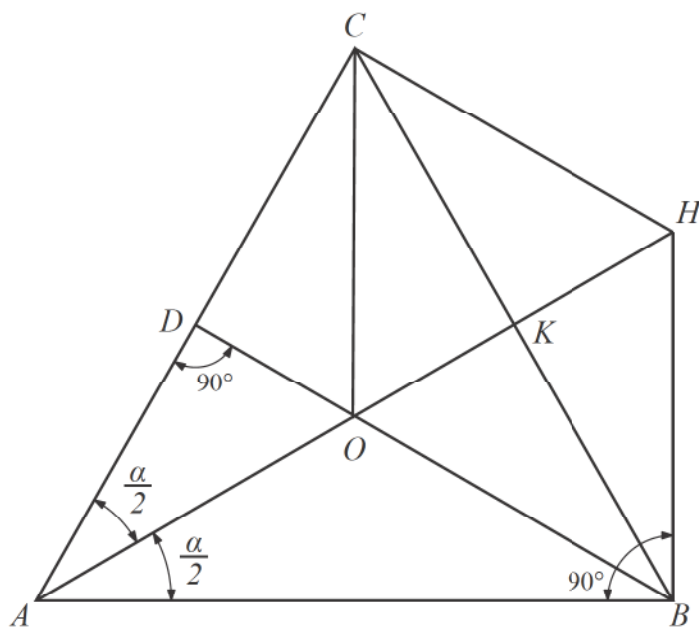


VI.

ОБЩИ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Задачи за триъгълник:

1.1.



Даден е триъгълник ABC . Тъглополовящата на $\angle BAC$ пресича височината BD в точка O , а перпендикуляра към AB , прекаран през върха B , в точка H .

- а) Да се докаже, че триъгълникът OBH е равнобедрен.
- б) Ако триъгълника ABC е равностранен, докажете, че $OBHC$ е ромб.

а) $\triangle ABH$ и $\triangle ADO$ са правоъгълни с равни ъгли

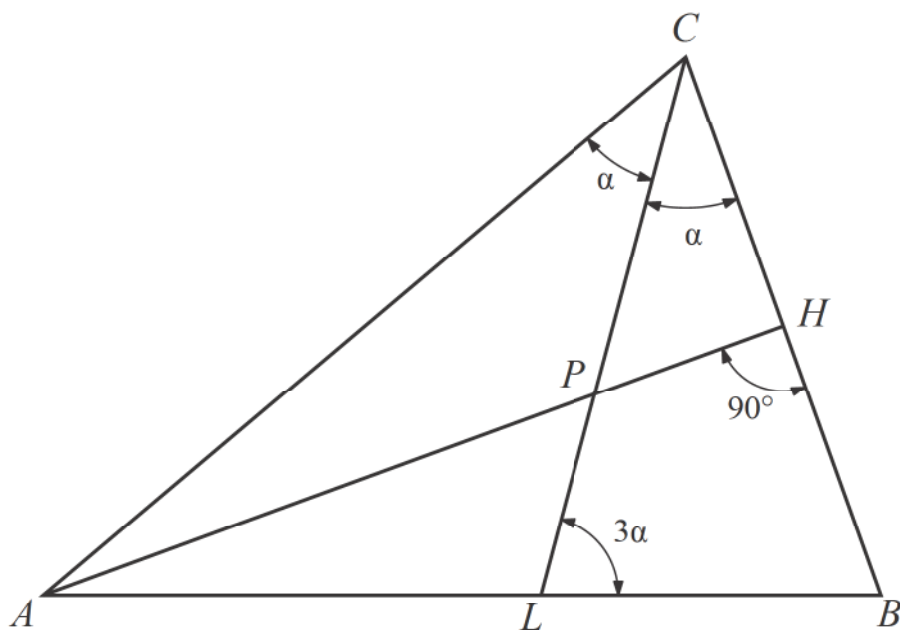
$\Rightarrow \angle BHO = \angle AOD = \angle BOH \Rightarrow BO = BH$, следователно OBH е равнобедрен

- б) $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \angle BHO = \angle AOD = \angle BOH = 60^\circ$ Но $AK \perp BC$ и $BK = CK \Rightarrow OH$ е симетрала на BC и $CO = OB = BH = CH$, следователно $OBHC$ е ромб.

1.2.

Даден е остроъгълен триъгълник ABC , в който са построени ъглополовящата CL и височината AH . Ако $\angle CLB = 3\angle ACL$,

- а) Докажете, че $AB = BC$.
 б) Ако $\angle APL = 60^\circ$, $CL \cap AH = P$ и $PL = 8$ см, пресметнете CP .



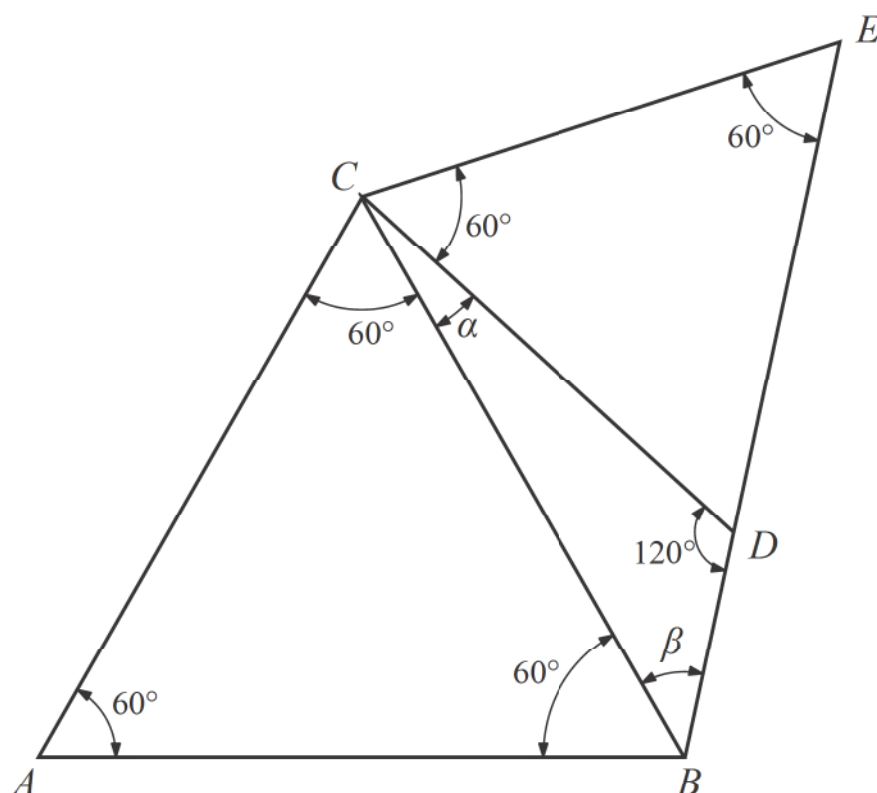
- а) $\angle ALC = 180^\circ - 3\alpha \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha = \angle ACB$
 Следователно $AB = BC$.
 б) $\angle APL = \angle HPC = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ = \angle BAC$,
 $3\alpha = 90^\circ$ следователно $CL \perp AB$. Тоест $\triangle ABC$ е равнобедрен.
 $\angle PAC = \angle ACP = 30^\circ = \angle PAL \Rightarrow CP = AP = 2LP = 16$ см, като
 хипотенуза в правоъгълен триъгълник.

1.3.

Външно за равностранен триъгълник ABC с построян триъгълник BCD , в който $\angle BDC$ е два пъти по-голям от сбора на другите му два ъгъла $\angle BCD$ и $\angle CBD$. Страната му BD е продължена до точката E , така че $DE = CD$ и точка D е между B и E .

а) Определете вида на триъгълника CDE .

б) Докажете, че $AD = BD + CD$.



а) $\angle BDC = 2(\alpha + \beta)$

Но $\angle BDC + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \angle BDC = 120^\circ$.

Но $CD = DE \Rightarrow \triangle DEC$ е равностранен.

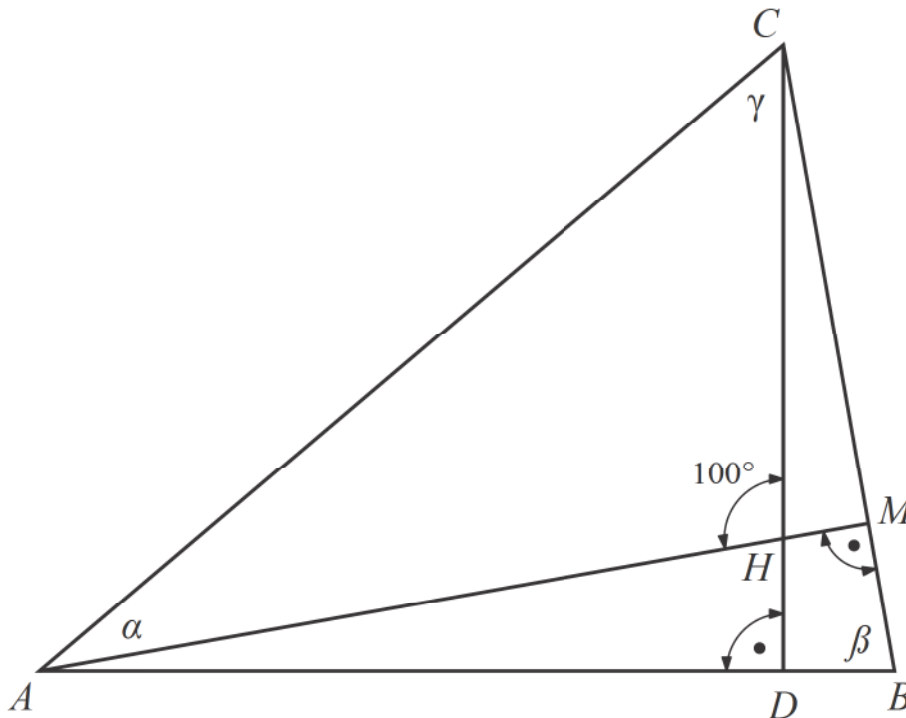
б) $\angle ACD = \angle BCE = 60^\circ + \alpha$ $AC = BC$ и

$CD = CE \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BEC \Rightarrow AD = BE = BD + DE = BD + CD \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD = BD + CD$

1.4.

Триъгълникът ABC с остроъгълна, а CD и AM са височини, които се пресичат в точка H .

- а) Ако $\angle AHC = 100^\circ$ и $\frac{\angle BAC}{\angle ACB} = \frac{2}{3}$, намерете ъглите на триъгълника ABC .
- б) Да се докаже, че $P_{AMC} > P_{DMC}$.



а) $\frac{\angle BAC}{\angle ACB} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 2x, \text{ а } \gamma = 3x$

Първи начин:

В четириъгълника $DBMH$ сбора от ъглите е 360° .

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle DHM = \beta + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 80^\circ.$$

$$\text{Но } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 5x = 100^\circ \Rightarrow x = 20^\circ.$$

Тоест $\alpha = 40^\circ$, а $\gamma = 60^\circ$.

Втори начин:

$$\angle HAC + \angle ACH + 100^\circ = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha + 100^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Следователно } \alpha + \gamma = 100^\circ \Rightarrow 5x = 100^\circ.$$

б) $AC > CD$

$$\angle ADM > 90^\circ \Rightarrow AM > DM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC + AM + MC > CD + DM + MC \Rightarrow P_{AMC} > P_{DMC}$$